ASTRA

OLIMPÍADA ESTUDANTIL ASTRA DE MATEMÁTICA

28ª EDIÇÃO | 2024

2ª FASE

NOME DO ALUNO: ____

ESCOLA: ____RG/RE____________________

28ª Olimpíada Estudantil Astra de Matemática 2024 – 2ª Fase

Todas as questões devem conter a resolução à caneta
Respostas sem justificativa não serão consideradas

1)Uma empresa que produz camisas recebeu uma encomenda de 7.020 unidades que deve estar pronta para entrega em cinco dias. Atualmente a confecção conta com 18 costureiras que produzem 1.080 camisas em um dia de trabalho. Para conseguir atender o pedido, quantas costureiras devem ser contratadas para os próximos cinco dias?

Resolução:

A quantidade de camisa que uma costureira produz é $\frac{1080}{18} = 60$. Em 5 dias uma costureira produz $60 \times 5 = 300$ camisas.

Então o número de costureiras para produzir 7.020 camisas deve ser $\frac{7020}{300} = 23{,}40$. Como a quantidade deve ser um número inteiro, serão necessárias 24 costureiras.

Logo, devem ser contratadas mais **6 costureiras** para produzir a demanda encomendada.

2) A média aritmética entre dois números é 5, e a média ponderada entre esses números, com pesos 2 e 3, é igual a 5,2. Assim, qual é o valor do produto entre esses números?

Resolução:

Sejam x e y os números. Temos:

$$\frac{x+y}{2} = 5 \qquad \rightarrow \qquad x+y=10 \qquad \rightarrow \qquad x = 10-y$$

e

$$\frac{2x+3y}{5} = 5{,}2 \qquad \rightarrow \qquad 2x+3y=26$$

Substituindo o valor de x da primeira equação na segunda, temos:

$$2 \times (10-y) + 3y = 26 \qquad \rightarrow \qquad 20 - 2y + 3y = 26 \qquad \rightarrow \qquad y = 6$$

Logo,

$$x = 10 - 6 \qquad \rightarrow \qquad x = 4$$

Portanto, o produto entre esses números é $\mathbf{6 \times 4 = 24.}$

3) Um clube promoveu um show de música popular brasileira ao qual compareceram 200 pessoas entre sócios e não sócios. No total, o valor arrecadado foi de R$ 1.400,00 e todas as pessoas pagaram ingresso. Sabendo-se que o preço do ingresso foi de R$ 10,00 e que cada sócio pagou metade desse valor, qual foi o número de sócios presentes?

Resolução:

Seja x a quantidade de sócios e y a quantidade de não sócios. Temos:

$$x + y = 200 \qquad \rightarrow \qquad x = 200 - y$$

e

$$5x + 10y = 1400$$

Substituindo o valor de x da primeira equação na segunda, temos:

$$5 \times (200 - y) + 10y = 1400 \qquad \rightarrow \qquad 1000 - 5y + 10y = 1400$$

$$5y = 400 \qquad \rightarrow \qquad y = 80$$

Logo,

$$x = 200 - 80 \qquad \rightarrow \qquad x = 120$$

Portanto, o número de sócios presentes foi **120.**

4) Um número inteiro positivo é chamado de tetrapar quando é divisível 4 vezes consecutivas por 2 e o resultado dá um número ímpar. Por exemplo o número 80 é tetrapar pois 80÷2 = 40, 40÷2 = 20, 20÷2 = 10, 10÷2 = 5. Quantos são os números tetrapares de 3 algarismos?

Resolução:

Um número que deve ser divisível 4 vezes consecutivas por 2, deve ser divisível por 16 $(2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16)$.

Então o número tetrapar deve ser da forma $16i$, com i sendo número ímpar.

O primeiro e o último número da forma $16i$ com 3 algarismos são $102\ (16 \times 7)$ e $976\ (16 \times 61)$, respectivamente.

Portanto, a quantidade de números tetrapares de 3 algarismos é a quantidade de ímpares entre 7 e 61, incluindo eles mesmos, ou seja, são **28 números.**

5) Eduardo e Cleide têm, cada um, um jarro grande com um litro de água. No primeiro dia Eduardo coloca 1ml da água do seu jarro no jarro de Cleide. No segundo dia, Cleide coloca 2ml da água do seu jarro no jarro do Eduardo. No terceiro dia, Eduardo coloca 3ml da água do seu jarro no jarro da Cleide, e assim por diante. Depois de 200 dias, quantos mililitros de água tem no jarro da Cleide?

Resolução:

Podemos montar o quadro abaixo demonstrando a evolução do jarro de Cleide durante os dias.

Dia	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
ML depositado ou retirado	1	-2	3	-4	5	-6	7	-8	9	-10	
ML jarro Cleide	**1001**	**999**	**1002**	**998**	**1003**	**997**	**1004**	**996**	**1005**	**995**	

Analisando os dados, podemos concluir que nos dias pares "n", Cleide tem em seu jarro $1000 - (\frac{n}{2})$ mililitros de água. Logo, depois de 200 dias, o jarro de Cleide terá:

$$1000 - \left(\frac{200}{2}\right) = \textbf{900 mililitros de água.}$$

6) Em um viveiro de uma universidade, havia várias araras: 90% eram azuis; 10%, verdes. Algumas araras azuis foram retiradas do viveiro para o Zoológico: agora, 80% das araras do viveiro são azuis. Qual é a porcentagem do número inicial total de araras no viveiro da universidade que foi transferida para o Zoológico?

Resolução:

Suponhamos que a quantidade total de araras nesse viveiro é 100, ou seja, 90 araras azuis e 10 verdes. Foram retiradas y araras azuis e a porcentagem caiu para 80%. Logo,

$$90 - y = 0,8 \times (100 - y)$$

$$90 - 80 = -0,8y + y \quad \rightarrow \quad y = \frac{10}{0,2} \quad \rightarrow \quad y = 50$$

Então, foram retiradas 50 araras azuis, que correspondem a **50% do número inicial total.**

7) Tripla pitagórica é uma sequência de três números inteiros positivos que satisfazem o famoso Teorema de Pitágoras. Em outras palavras, se a sequência (a, b, c) é uma tripla pitagórica, então o triângulo de lados a, b e c é um triângulo retângulo. Por exemplo, (3, 4, 5) e (5, 12, 13) são triplas pitagóricas.

a) Verifique se a sequência (20,21,29) é uma tripla pitagórica. Justifique sua resposta.

Resolução:

Para saber se é uma tripla pitagórica, basta verificar a igualdade do Teorema de Pitágoras, observando que a hipotenusa deve ser o lado maior do triângulo. Então,

$$29^2 = 21^2 + 20^2$$

$$841 = 441 + 400 \quad \rightarrow \quad 841 = 841$$

Portanto, a sequência (20,21,29) é uma tripla pitagórica.

b) Justifique por que a sequência de números inteiros (n, n+3, n+5) não constitui uma tripla pitagórica para nenhum n inteiro positivo.

Resolução:

Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$(n+5)^2 = (n+3)^2 + (n)^2$$

$$n^2 + 10n + 25 = n^2 + 6n + 9 + n^2$$

$$n^2 - 2n^2 + 10n - 6n + 25 - 9 = 0$$

$$-n^2 + 4n + 16 = 0 \qquad \rightarrow \qquad n^2 - 4n - 16 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau,

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-16)$$

$$\Delta = 80$$

$$n = \pm\frac{\sqrt{80}}{2 \times 1} \qquad \rightarrow \qquad n = \pm\frac{4\sqrt{5}}{2}$$

$$n_1 = 2\sqrt{5} \quad e \qquad n_2 = -2\sqrt{5}$$

Como $\sqrt{5}$ é um número irracional, concluímos que não existe tripla pitagórica (n, n+3, n+5) para nenhum n inteiro positivo.

8) Na conta indicada a seguir, as letras X, Y e Z representam algarismos distintos. Qual é o algarismo representado pela letra Z?

$$\begin{array}{r} XXXX \\ YYYY \\ +\ ZZZZ \\ \hline YXXXZ \end{array}$$

Resolução:

Na casa das unidades, $X + Y + Z$ resulta em um número com final Z. Para que isso ocorra, $X + Y$ deve ser igual a 10. No resultado dessa soma "vai um" para a casa da dezena.

Na casa das dezenas, a soma $1 + X + Y + Z$ é um número com final X. Esse é processo é repetido até a casa do milhar, onde $1 + X + Y + Z = YX$. Podemos concluir que Y é igual a 1 ou 2, porque o valor máximo que os algarismos X, Y e Z podem assumir é 9, e a soma seria $1 + 9 + 9 + 9 = 28$.

Se $Y = 2$,

$$X + 2 = 10 \qquad \rightarrow \qquad X = 8$$

e

$$1 + X + Y + Z = YX \qquad \rightarrow \qquad 1 + 8 + 2 + Z = 28 \qquad \rightarrow \qquad Z = 17$$

Esse resultado é impossível porque o valor máximo que Z pode assumir é 9.

Se $Y = 1$,

$$X + 1 = 10 \qquad \rightarrow \qquad X = 9$$

e

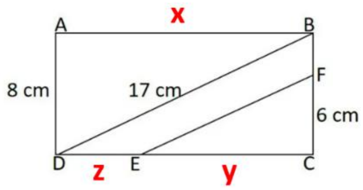
$$1 + X + Y + Z = YX \quad \rightarrow \quad 1 + 9 + 1 + Z = 19 \quad \rightarrow \quad Z = 8$$

Portanto, a soma é

	9	9	9	9
	1	1	1	1
+	8	8	8	8
1	9	9	9	8

E o valor de **Z é 8.**

9) Seja $ABCD$ um retângulo, com $AD = 8cm, FC = 6$cm e DB paralelo à EF. Determine a medida do segmento DE.



Resolução:

Sejam, $AB = x, EC = y \; e \; DE = z.$

Com as propriedades mencionadas da figura, chegamos à conclusão que o triângulo retângulo ABD é semelhante ao triângulo retângulo CEF.

Aplicando o Teorema de Pitágoras,

$$17^2 = 8^2 + x^2 \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{225} \quad \rightarrow \quad x = 15$$

Por semelhança de triângulos,

$$\frac{6}{y} = \frac{8}{15} \quad \rightarrow \quad y = \frac{90}{8} \quad \rightarrow \quad y = 11{,}25$$

e, por se tratar de lados do retângulo,

$$x = z + y \quad \rightarrow \quad 15 = z + 11{,}25 \quad \rightarrow \quad z = 3{,}75$$

Portanto, a medida do segmento DE é **3,75cm.**